Практическое занятие. Тема 7

Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых величин

Замечательные пределы

Широко используются следующие два замечательных предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\approx 2{,}71828$.

<u>*Пример 1.*</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

Так как $x\neq 0$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

<u>*Пример 2.*</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{1}{y}$. Тогда $x=y+1/2$ и при $x\to\infty$ $y\to\infty$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{3y+5/2}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}\right)^{3}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{5/2}\right)=e^3$.

Аудиторные занятия:

Найти пределы указанных функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\sin 2x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$.
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)))$.

Домашние задания:

Найти замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 7x}$

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin 3(x+1)}{x^2-4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-4}$.

Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечной малой функцией при* $x\to x_0$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ находят предел их отношения:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C \qquad (1)$$

Если $C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка;* если $C=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\beta(x)$, а $\beta(x)$ - *бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с* $\alpha(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C \quad (0<|C|<\infty)$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* k *по сравнению с* $\beta(x)$ *при* $x\to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ называются *эквивалентными (равносильными) величинами*: $\alpha(x)\approx\beta(x)$. Например, при $x\to 0$ $\sin ax\approx ax,\ tgx\approx x,\ \ln(1+x)\approx x,\ e^{ax}-1\approx ax$.

Легко доказать, что предел отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ равен пределу эквивалентных им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$ при $x\to x_0$, т.е. верны предельные равенства:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

__Пример 1.__ Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

Поскольку $\sin 5x\approx 5x,\ \ln(1+x)\approx x$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5.$$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной при* $x=x_0$ *(в точке* x_0*)*, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (2)$$

Если положить $x=x_0+\Delta x$, то условие непрерывности (2) будет равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0$, т.е. функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках интервала (a,b) называется *непрерывной в этом интервале*. Функция, заданная на отрезке $[a,b]$ называется *непрерывной на этом отрезке*, если она непрерывна в интервале (a,b) и $f(a+0)=f(a),\ f(b-0)=f(b),\ a<b$.

Пример 2. Доказать непрерывность функции $y=\sin 5x$ для любого $x \in R$.

Для любого приращения Δx независимой переменной приращение функции

$$\Delta y = \sin 5x(x+\Delta x) - \sin 5x = \cos\left(5x+\frac{5}{2}\Delta x\right)\cdot \sin\frac{5}{2}\Delta x.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(5x+\frac{5}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{5}{2}\Delta x = 0$, так как $\cos 5x$ - ограниченная функция для любого $x\in R$. Следовательно, функция $y=\sin 5x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции*. Если в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, такие, что $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или равен бесконечности, то точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода*. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ и функция $f(x)$ не определена в точке x_0 или определена, но $f(x)\neq f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва функции*. Например, для функций $y=x\cos\frac{1}{x}$ и $y=\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ является устранимой точкой разрыва.

Аудиторные занятия:

1. Определить порядок бесконечно малой функции $y=7x^8/(x^4+1)$ относительно бесконечно малой *x* при $x\to 0$.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}(x^2-9)/(x-3), & \text{если } x\neq 3\\ A, & \text{если } x=3\end{cases}$. При каких значениях функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x=3? Построить график функции.

3. Установить область непрерывности функции $y=(3x+3)/(2x+4)$ и найти ее точки разрыва.

4. Дана функция $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x<0\\ \sin x, & \text{если } 0\le x<\pi/2\\ x-\pi/2+1, & \text{если } x\ge\pi/2\end{cases}$. Найти точки разрыва функции и построить ее график.

5. Исследовать на непрерывность функцию $y=3^{1/(x+1)}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Домашние задания:

1.Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=(2x+4)/(3x+9)$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=-3$. Сделать схематический чертеж.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x<0 \\ \cos x, & \text{если } 0\le x<\pi/2 \\ 1-x, & \text{если } x\ge \pi/2 \end{cases}$. Исследовать ее на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

3. Исследовать на непрерывность функции $f(x)=(3x-2)/(x+2)$ в точках $x_1=0$ и $x_2=-2$. Сделать схематический чертеж.

Практическое занятие. Тема 8

Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва, их квалификация. Свойства непрерывных функций

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при* $x = x_0$ *(в точке* x_0*)*, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности будет равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках интервала (a,b) называется *непрерывной в этом интервале*. Функция, заданная на отрезке $[a,b]$ называется *непрерывной на этом отрезке*, если она непрерывна в интервале (a,b) и $f(a+0) = f(a),\ f(b-0) = f(b),\ a < b$.

<u>Пример 2.</u> Доказать непрерывность функции $y = \sin 5x$ для любого $x \in R$.

Для любого приращения Δx независимой переменной приращение функции

$$\Delta y = \sin 5x(x + \Delta x) - \sin 5x = \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \sin\frac{5}{2}\Delta x.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{5}{2}\Delta x = 0$, так как $\cos 5x$ - ограниченная функция для любого $x \in R$. Следовательно, функция $y = \sin 5x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции*. Если в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода*. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и функция $f(x)$ не определена в точке x_0 или определена, но $f(x) \neq f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва функции*. Например, для функций $y = x\cos\frac{1}{x}$ и $y = \frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва.

Аудиторные занятия:

1. Дана функция $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 9)/(x - 3), & \text{если } x \neq 3 \\ A, & \text{если } x = 3 \end{cases}$. При каких значениях функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x=3? Построить график функции.

2. Установить область непрерывности функции $y=(3x+3)/(2x+4)$ и найти ее точки разрыва.

3. Дана функция $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \textit{если } x<0 \\ \sin x, & \textit{если } 0\le x<\pi/2 \\ x-\pi/2+1, & \textit{если } x\ge \pi/2 \end{cases}$. Найти точки разрыва функции и построить ее график.

4. Исследовать на непрерывность функцию $y=3^{1/(x+1)}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Домашние задания:

1.Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=(2x+4)/(3x+9)$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=-3$. Сделать схематический чертеж.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 1, & \textit{если } x<0 \\ \cos x, & \textit{если } 0\le x<\pi/2 \\ 1-x, & \textit{если } x\ge \pi/2 \end{cases}$. Исследовать ее на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

3. Исследовать на непрерывность функции $f(x)=(3x-2)/(x+2)$ в точках $x_1=0$ и $x_2=-2$. Сделать схематический чертеж.